Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

I Formes multilinéaires et déterminant

1) Formes multilinéaires

Définition 1. Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ est dite p-linéaire si, en tout point, les p applications partielles sont linéaires. On note $f \in \mathcal{L}_p(E_1 \times \dots \times E_p, F)$. On parle de forme p-linéaire sur E si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = \mathbb{K}$, l'ensemble des formes p-linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

Exemple 2. *Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, l'application*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \varphi_1(x_1) \dots \varphi_p(x_p) \end{array} \right.$$

est dans $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

Définition 3. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

(i) f est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

(ii) f est dite antisymétrique si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Remarque 4. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$, f est antisymétrique si, et seulement si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a :*

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

Théorème 5. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$. Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, alors f est antisymétrique si, et seulement si, f est alternée.*

Théorème 6. *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. De plus, si x_j s'écrit $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans la base $\mathcal{B}$, les formes n-linéaires alternées sur E sont les applications qui sont de la forme :*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

2) Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 7. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$$

Proposition 8. *(i) Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$, alors on a :*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

(ii) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \text{ et } \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$$

Théorème 9. *Soient $x_1, \dots, x_n \in E$, il y a équivalence entre :*

(i) La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

(ii) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 10. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det f$.

Proposition 11. *(i) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.*

(ii) $\det Id_E = 1$

(iii) $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $f \in \mathcal{G}\ell_n(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$, et on a $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Définition 12. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et on le note $\det A$. On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Exemple 13. *(i) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$*

(ii) Règle de Sarrus : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

Proposition 14. *(i) Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *alors* $\det f = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors* $\det A = \det {}^{\mathrm{t}}A$.

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iv) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

II Méthodes de calcul

1) Se ramener au cas triangulaire

Proposition 15. *On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, de même pour les lignes.*

Proposition 16. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est triangulaire, alors* $\det A$ *est le produit des éléments diagonaux de* A.

Exemple 17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Proposition 18. *Si* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *avec* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_[(n) - p]\mathbb{K}$ *et* $C \in \mathcal{M}_[(p), n-p]\mathbb{K}$*, alors* $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

2) Mineurs et cofacteurs

Définition 19. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout (i,j) on appelle mineur de l'élément $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A. Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle cofacteur de $a_{i,j}$.

Proposition 20. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors on peut développer le déterminant par rapport à :*

(i) la j*-ième colonne :* $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$

(ii) la i*-ième ligne :* $\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$

Exemple 21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

Définition 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $(A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des cofacteurs est appellée comatrice de A et notée $\mathrm{Com}(A)$.

Proposition 23. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors :*

$$A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Exemple 24. *Pour* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3) Déterminants particuliers

Application 25 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ *avec* $n \geqslant 2$.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Application 26 (Déterminant de Cauchy)**.** *Soient* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ *tels que pour tout* (i,j), $a_i + b_j \neq 0$ *:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}$$

Application 27 (Déterminant circulant)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *et* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n P(\omega^j) \text{ où } P(X) = a_1 + a_2X + \ldots + a_nX^{n-1}$$

III Applications

1) Systèmes linéaires

Application 28 (Cramer)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b, X \in \mathbb{R}$*. Alors* $AX = B$ *admet une unique solution si, et seulement si,* $\det A \neq 0$*. En notant* A_j *est la* j*-ième colonne de* A*, les* x_i *sont donnés par :*

$$x_i = \frac{\det_(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det A}$$

Exemple 29. *Si* $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ *, alors* $x = 5, y = z = 1$.

2) Réduction des endomorphismes

Définition 30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A l'élément de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque 31. $\chi_A(0) = \det A$

Proposition 32. *λ est valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$.*

Proposition 33. $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi = (-1)^n \left(X^n + \sum_{i=0}^{n} a_i X i \right)$

Théorème 34 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.*

3) Matrice et déterminant de Gram

Définition 35. On appelle matrice de Gram de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la matrice $M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme 36. *Le déterminant de Gram d'une famille de vecteurs est nul si, et seulement si, elle est liée.*

Théorème 37. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Théorème 38 (Hadamard)**.** *(i) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1, \dots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

(ii) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$.

Dans les deux cas, on a égalité si, et seulement si, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

4) Géométrie

Théorème 39. *Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$, on note $Vol(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$, alors :*

$$Vol(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

Lemme 40. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives distinctes, et $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors :*

$$\det(\alpha A + \beta B) > \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Application 41 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant K.*

Développements

— Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard (36,37,38) [Gou94]

— Ellipsoïde de John-Loewner (40,41) [FGN13c]

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition

[Gri11] J. Grifone. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 4e édition

[FGN13c] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini